§ 1D. Гаусс және шартты-Гаусс модельдері

1.Тиімді нарық тұжырымдамасы бағалардың (нормаланған) гипотезасын негіздейді, осылайша "мартингал" ұғымы стохастикалық реттілік немесе оларды бөлудің белгілі бір қасиеттері бар процестер ретінде бағалар эволюциясының динамикасын зерттеудегі негізгі ұғымдардың бірі болып табылады. Алайда, нақты есептеулерді жүргізу кезінде "үлестірудің мартингалдылығы" туралы білім өте аз – бұл үлестірімдердің неғұрлым "жұқа" құрылымы қажет, бұл олардың таралу қасиеттері статистикалық мәліметтерге сәйкес құрылған эмпирикалық үлестірімдердің қасиеттеріне жақсы сәйкес келетіндерін анықтау үшін әр түрлі ықтималды-статистикалық модельдерді егжей-тегжейлі қарастыру қажеттілігіне әкеледі. Дәл осы мақсатқа, шын мәнінде, осы тараудың барлық кейінгі материалдары арналған, онда "статистикалық шикізатты" талдау кезінде анықталған белгілі бір қасиеттерді түсіндіруге мүмкіндік беретін модельдер ұсынылған, атап айтқанда уақытша қаржылық қатарлар құрған.

 шамаларының үлестірімдерінің гаусстық жорамалы, әрине, теориялық талдау тұрғысынан да, жақсы дамыған "қалыпты үлестіру статистикасы" тұрғысынан да ең тартымды болып табылады. Бірақ, жоғарыда айтылғандай, көптеген қаржы қатарларының мәліметтерін статистикалық өңдеу гауссистік болжам әрқашан баға мінез-құлқының шынайы көрінісін көрсете бермейтінін көрсетеді (және онымен есептеледі).

Егер тізбегі үшін шартсыз үлестірімінің гауссистік болжамына балама іздеуге тырыссақ, онда шартты математикалық күтімдерді тарту арқылы анықталатын "Дуб ыдырауын" ескере отырып, шартсыз емес, бірақ шартты ықтималдылықтың үлестірімін гаусстық деп санауға болады:

(1)

Кейбір және -өлшенетін шамалармен.

 Дәлірек айтқанда, теңдік (1) (регулярлық) шартты үлестірімі формуламен берілген (барлық және үшін):

Осы шартты үлестірімнің регулярлығы арқылы қарапайым интеграция арқылы табылуы мүмкін (әр бекітілген үшін):

 Демек, қарастырылып отырған жағдай үшін орындалады:

(2)

Сәйкесінше

(3)

Сонымен, және параметрлері қарапайым "дәстүрлі" мағынаға ие –бұл (шартты) үлестірімінің шартты орташа және шартты дисперсиясы.

 үлестірімінің өзі, және шамаларының орташа таралуымен шартты гаусстық үлестірімдерінің қоспасы болып табылады.

 "кездейсоқ" параметрлері бар қалыпты үлестірімдердің "қоспасы" нәтижесінде пайда болған үлестіру класы өте кең екенін ескеріңіз. Мұндай үлестірулердің әртүрлі ерекше жағдайларымен біз болашақта бірнеше рет кездесетін боламыз.

 тізбегімен қатар "стандартты" түрде шартты-Гаусс тізбегін -өлшенетін мынадай кездейсоқ шамалармен енгізген жөн:

мұндағы

Бұл реттілік мартингал-айырырым екені түсінікті, өйткені . Сонымен қатар, бұл стандартты қалыпты үлестірімі бар тәуелсіз кездейсоқ шамалардың тізбегі болады, өйткені

Жоғарыда келтірілген болжамға байланысты формуласымен анықталған шамалары, стандартты Гаусс тізбегін құрайды. Демек, қарастырылып отырған шартты-гаусстық ( ағынға және ықтималдыққа қатысты) реттілік мына түрде ұсынылған деп санауға болады:

(4)

мұндағы - стандартты қалыпты үлестірімі бар тәуелсіз -өлшенетін кездейсоқ шамалардың тізбегі.

 , яғни тізбегінің ықтималдық қасиеттерін неғұрлым егжей-тегжейлі зерттеу және шамаларының құрылымын нақтылауға байланысты екені анық. Бұл төменде келтірілген модельдерде жасалады.

 тізбегін үлестіру және шартты-гаусстық қасиетке ие болу ниеті тұрғысынан бұл қасиетті келесі контексте қарастырған жөн. – ішкі фильтрациясы(сүзгілеу) болсын, яғни ; мысалы, .

 деп қарастырайық. Бұл жағдайда үлестірімі гаусстың қоспасы болып табылады.

Енді кейбір нақты (сызықтық және сызықты емес) гаусс және шартты-гаусс модельдеріне жүгінеміз, онда үшін мәндері таңдалады және және үшін бастапқы шарттар және берілуі тиіс.

2. ретті авторегрессиялық модель. Бұл модельде

(5)

және

(6)

(7)

формулаларын қарастыруға болады.

 Осылайша, мұнда

 ретті авторегрессиялық модель (AutoRegressive model) деп аталатын тізбегі оны анықтау үшін бастапқы мәндерінің тапсырмасын талап етеді. Егер бұл мәндер тұрақты болса, онда тізбегі тек қана шартты-гаусс емес, сонымен қатар (жай) гаусс болады. § 2b-де бірінші ретті авторегрессиялық модельдің қасиеттерін егжей-тегжейлі талдау жүргізіледі.

 3. жылжымалы орта моделі. Бұл модельде ( аббревиатурасы Moving Average дегенді білдіреді) бастапқы мәндер беріледі және

, (8)

сүйенеді.

 Соған сәйкес

(9)

 4. авторегрессия және жылжымалы орта моделі. үшін бастапқы шарттар берілген , және

 (10)

орындалады.

 Осы типтегі ретті модель (AutoRegressive Moving Average) арқылы белгіленеді және авторегрессия және ретті жылжымалы ортаның аралас моделі деп аталады; ол егер

(11)

орындалса, іске асырылады.

 Барлық осы үш модель, , және сызықтық Гаусс модельдері болып табылады (егер "бастапқы" шарттар тұрақты болса).

Енді кейбір қызықты шартты-гаусс модельдеріне көшейік, олар (бұрынғыға қарағанда) сызықты емес болсып табылады.

5. Біртекті емес шартты авторегрессиялық моделі . Осы жолы да, тізбегі кездейсоқтықтың жалғыз көзі болсын, ,

(12)

және

(13)

Мұнда және – берілген бастапқы тұрақтылар.

 Басқаша айтқанда, шартты дисперсия - мәндерінің функциясы.

 1982 жылы Р.Энгель (R. F. Engle, [140]) енгізген және ол (autoregressive Conditional Heteroskedastic model – шартты біртекті емес авторегрессиялық моделі) енгізген бұл модель уақытша қаржы қатарларының мысалы, мәндерінің кластерлік әсері (жинақталуы) сияқты тривиалды емес бірқатар қасиеттерін түсіндіруде өте сәтті болды.

 Сонымен,

, (14)

мұнда - тәуелсіз қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі, , ал мына (13) формуламен анықталады.

 Егер (12) теңдігінің орнына

(15)

орындалса, ал (13) шартына бағынса, онда (4) теңдігі мына түрге келеді:

(16)

 Бұл модельдер кейде -ді білдіреді.

 Қоямыз ( деп есептеп):

(17)

Онда (13) формула арқылы мынаны ала аламыз:

(18)

мұнда

*,*

яғни реттілігі мартингал-айырым болады.

 Осылайша, - модельді "шулы" тізбегі үшін авторегрессиялық моделі ретінде қарастыруға болады.

 6. Шартты біртекті емес жалпыланған авторегрессиялық моделі . моделін қолданудың сәттілігі оның әртүрлі жалпылауының, нақтылауының, модификациясының және т. б. пайда болуына әкелді.

1986 жылы Т.Боллерслев(T. Bollerslev, [48]) енгізген моделі (Generalized ARCH – шартты біртекті емес жалпыланған авторегрессиялық моделі) осындай түрлердің бірі болып табылады.

Бастапқыдағыдай

деп есептеп, (13) формула орнына мына теңдік орындалады деп қарастырамыз:

(19)

 және , “бастапқы” шарттарымен бірге, олар қарапайымдылық үшін тұрақты болсын.

 моделі – бұл реттілігі

(20)

мұнда - тәуелсіз қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі, , ал мына (19) формуламен анықталады.

 (21)

деп белгілейік, мұнда – жылжу операторы және

(22)

 Осы белгілеулерде

 Егер, жоғарыдағыдай, деп қойсақ, онда мынаны аламыз:

Басқаша айтқанда,

(23)

 Осылайша, модельді мартингал-айырым болып табылатын "шулы" тізбегі үшін сырғымалы орташа авторегрессия моделі ретінде қарастыруға болады.

 Атап айтқанда, моделі үшін

,

екенін табамыз және деп есептеп,

мұнда "шуы" мартингал-айырым жасайды.

 және модельдерінің әртүрлі жалпылама тұжырымдары (мысалы, ), сайып келгенде, мәндерінің бір немесе басқа сипаттамасымен байланысты, -алгебраларға қатысты өлшенетін функциялар ретінде .

 7.Стохастикалық құбылмалылық моделі. Барлық алдыңғы модельдерде кездейсоқтық көзі біреу болды. Ол тәуелсіз шамалардың гаусстық реттілігімен анықталды. Стохастикалық құбылмалылық модельдері кездейсоқтықтың екі көзін қамтиды: және , олар қарапайым жағдайда тәуелсіз үлестірілген кездейсоқ шамалардан тұратын тәуелсіз және стандартты гаусс тізбегі саналады.

 болсын. Қоямыз:

(24)

мұнда -өлшенетін болады.

 Онда мына теңдік орындалатыны анық:

(25)

Яғни – және параметрлерімен бірге шартты үлестірімі гаусстық болып саналады.

 Қоямыз:

(26)

 Онда , мұнда -өлшенетін болады. тізбегі авторегрессиялық модель болатын модельдер танымал,

 (24)-тің табиғи жалпылауы мына сұлбамен сипатталады:

 (27)

мұнда -өлшенетін және болады.

 Егер тізбегі (27) формуласы бойынша қалыпты үлестірілген стационарлық реттілік болса, , , ал -дан тәуелсіз болған жағдайда, сәйкес модель Тейлордың моделі деп аталады.

 Мұнда қаржылық математика мен қаржылық инженерияда қолданылатын бірқатар гаусс және шартты-гаусс модельдері туралы қысқаша талқылауды аяқтаймыз. Осы модельдердің қасиеттерін егжей-тегжейлі зерттеу бұдан әрі 2 және 3-бөлімдерде жүргізіледі.